

# Zur Theorie des Wärmestrompotentials in angeströmten Lichtbögen

A. KOLLER

Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen

(Z. Naturforsch. 21 a, 505—510 [1966]; eingegangen am 1. März 1966)

*Herrn Prof. Dr. TRENELENBURG zum 70. Geburtstag gewidmet*

In einem stationären Lichtbogen läßt sich die Abhängigkeit des Wärmestrompotentials von einem radialem oder axialen Massenstrom durch analytische Lösungen der ELENBAAS-HELLERSchen Differentialgleichung beschreiben. Die angegebene Lösung enthält im Falle des axial angeströmten Lichtbogens die bekannte Theorie von STINE und WATSON als eine erste Näherung. Die Isothermen des stationären Lichtbogens werden in dimensionslosen Variablen berechnet, so daß die Darstellung die Größen Massenstrom, Bogenradius und Stromstärke sowie die Materialkonstanten elektrische Leitfähigkeit, Wärmeleitfähigkeit und spezifische Wärme nicht mehr enthält. Transformationen leisten den Übergang zu einem speziellen Bogentyp. Die Bedingungen für den Anschluß der stromlosen Zone an den leitfähigen Kern lassen sich erfüllen. Die Lösung zeigt Beziehungen zwischen den Isothermen in einem Lichtbogen und in einer Flamme auf. Es werden ferner Ausdrücke für die Bogenspannung und die Bogenleistung angegeben.

Nachdem die Theorie der zylindrischen stationären Lichtbögen durch die Arbeiten von FINKELNBURG und MAECKER<sup>1</sup> und SCHMITZ<sup>2</sup> einen befriedigenden Abschluß gefunden hat, untersuchen neuere Arbeiten die Gasströmung im Lichtbogen und ihre Einflüsse auf die Temperaturverteilung und die Energiebilanz. Die ersten Publikationen auf diesem Gebiet betrafen experimentelle Arbeiten<sup>3, 4</sup>, in denen jedoch auch schon theoretische Ansätze zur Erklärung der Phänomene versucht werden. In den letzten Jahren setzten ausführlichere theoretische Untersuchungen des beströmten Lichtbogens ein. STINE und WATSON<sup>5</sup> fanden einen brauchbaren Ansatz für den axial angeströmten Lichtbogen, der die Einlauflänge und die Energiebilanz des Lichtbogens richtig wiedergibt. Mit Hilfe eines Störungsansatzes, der der bekannten zylindrischen Lösung überlagert wird, konnte PATT<sup>6</sup> auch die Isothermen berechnen. Lediglich in Kathodennähe wird seine Lösung ungenau. Eine ausführliche Behandlung des komplizierten Systems der Plasmagleichungen unter den Bedingungen des angeströmten Lichtbogens bringen SCHMITZ, DRUXES und PATT<sup>7</sup>.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß man unter naheliegenden Annahmen mit relativ einfachen mathematischen Mitteln analytische Lösungen der ELENBAAS-HELLERSchen Differentialgleichung erhalten kann, die den experimentellen Tatbestand recht

<sup>1</sup> W. FINKELNBURG u. H. MAECKER, Handbuch der Physik, Bd. XXII, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956.  
— H. MAECKER, Z. Phys. 157, 1 [1959].

<sup>2</sup> G. SCHMITZ, Z. Naturforsch. 5 a, 571 [1950].

<sup>3</sup> TH. PETERS, Naturwiss. 24, 571 [1954].

gut wiedergeben. Für den Bogen mit axialer Massenströmung wird die Lösung von STINE und WATSON verallgemeinert, so daß auch in Kathodennähe die Isothermen berechnet werden können. Dabei zeigen sich Beziehungen zur Theorie der Flammen. Bei der radialem Massenströmung erhält man für das Wärmestrompotential ein einfaches Potenzgesetz. Ferner werden Ausdrücke für die Bogenspannung und Bogenleistung angegeben.

## 1. Die Ausgangsgleichung

Die ELENBAAS-HELLERSche Differentialgleichung für die Energiebilanz im stationären Lichtbogen unter dem Einfluß der Strömung lautet bei Vernachlässigung der Strahlung:

$$-\operatorname{div} \alpha \operatorname{grad} T + \varrho c_p v \cdot \operatorname{grad} T = \sigma E^2, \quad (1)$$

$\alpha$  ist die Wärmeleitfähigkeit,  $T$  die Temperatur,  $c_p$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck,  $\varrho$  die Dichte,  $v$  die Geschwindigkeit,  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit des Gases,  $E$  die elektrische Feldstärke.

Mit Hilfe der SCHMITZschen  $S$ -Funktion, die durch

$$\alpha \operatorname{grad} T = \operatorname{grad} S \quad (2)$$

definiert ist und die Bezeichnung Wärmestrompotential trägt, erhalten wir

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} S + (\varrho c_p / \alpha) v \cdot \operatorname{grad} S = \sigma E^2, \quad (3)$$

<sup>4</sup> H. MAECKER, Z. Phys. 141, 198 [1955].

<sup>5</sup> H. A. STINE u. V. D. WATSON, NASA Techn. Note, D-1331, Washington 1962.

<sup>6</sup> H. J. PATT, Dissertation, Tech. Hochschule Aachen 1964.

<sup>7</sup> G. SCHMITZ, H. DRUXES u. H. J. PATT, Z. Phys. 187, 271 [1965].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

und mit der Abkürzung  $\operatorname{grad} S = \mathfrak{G}$

$$-\operatorname{div} \mathfrak{G} + (\varrho c_p/\varkappa) \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{G} = \sigma E^2. \quad (4)$$

$c_p/\varkappa$  soll durch eine Konstante angenähert werden. Multipliziert man (2) mit diesem Faktor, so erhält man

$$c_p \operatorname{grad} T = \operatorname{grad} h = (c_p/\varkappa) \operatorname{grad} S, \quad (5)$$

wo  $h$  die Enthalpie pro Masseneinheit ist. Statt  $S$  können wir also auch  $h$  benutzen.

Bei ebener Strömung ist  $\varrho \mathfrak{v}$  gemäß der Kontinuitätsgleichung konstant, und zwar sowohl für die inkompressible als auch für die kompressible Strömung. Bei radialer zylindrischer Strömung ist  $\varrho \mathfrak{v} = \varrho_0 \mathfrak{v}_0 r_0/r$ , wo  $\varrho_0 \mathfrak{v}_0$  ein konstanter Vektor radialer Richtung ist. Daher kann  $\varrho \mathfrak{v} c_p/\varkappa = a$  bzw.  $= a/r$  gesetzt werden, wo  $a$  eine Konstante ist.

Wir haben nun außer der Energiebilanz (1) noch die Kontinuitätsgleichung benutzt. An Stelle der Kraftgleichung verwenden wir eine bestimmte Annahme über die Richtung der Geschwindigkeit: sie ist entweder achsenparallel oder radial. Über den Betrag der Geschwindigkeit kann keine Aussage gemacht werden, sondern nur über den Massenfluß  $\varrho \mathfrak{v}$ .

Für  $\sigma$  gelte die häufig benutzte Näherung

$$\sigma = B(S - S_0), \quad (6)$$

wo  $B$  und  $S_0$  konstante Werte annehmen. Mit  $\operatorname{grad}(S - S_0) = \operatorname{grad} S$  kann man (3) in der Form schreiben:

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \tilde{S} + (\varrho c_p \mathfrak{v}/\varkappa) \cdot \operatorname{grad} \tilde{S} = B E^2 \tilde{S}. \quad (7)$$

Dabei wurde  $S - S_0 = \tilde{S}$  gesetzt.

## 2. Der zylindersymmetrische Bogen mit radialer Strömung

$S$  soll nur von  $r$  abhängen. Wir betrachten ein vereinfachtes Modell. Der Bogen werde in zwei Zonen eingeteilt: die innere, leitfähige Zone für  $r < r_0$ , in der  $B \neq 0$  ist, und die äußere, stromlose Zone, in der  $B = 0$  ist. In der stromlosen Zone kann  $S_0 = 0$ , also  $\tilde{S} = S$  gesetzt werden. Dort ist  $\varrho v = \text{const}/r$ , also  $\varrho v c_p/\varkappa = a/r$ . In der leitfähigen Zone muß die Strömung axial zu- bzw. abgeführt werden. Dort sei näherungsweise  $\mathfrak{v} \perp \operatorname{grad} T$  angenommen, so daß der Strömungsterm in (7) wegfällt und man in bekannter Weise erhält<sup>1</sup>:

$$\tilde{S} = C_1 \cdot J_0(\sqrt{B E^2} r). \quad (8)$$

$J_0$  ist die BESSEL-Funktion nullter Ordnung.

Für  $r = r_0$  sei  $S = S_0$ , woraus

$$r_0 = 2,405/\sqrt{B E^2} \quad (9)$$

folgt. Für die stromlose Zone lautet (4) in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{1}{r} \frac{d(r G)}{dr} - \frac{a}{r} G = 0. \quad (10)$$

Die Lösung ist  $G = G_0 \cdot r^{a-1}$  und man erhält:

$$S = \begin{cases} S_1 + (G_0/a) r^a & \text{für } a \neq 0, \\ S_1 + G_0 \ln(r/r_1) & \text{für } a = 0, \end{cases} \quad (11)$$

Es ist  $S = S_1$  bei  $r \rightarrow \infty$  für  $a < 0$  und bei  $r = r_1$  für  $a = 0$ .  $r_1$  ist ein beliebiger Bezugsradius. Bei  $r = r_0$  müssen die Werte für  $S$  und  $\partial S / \partial r$  nach (8) und (11) übereinstimmen, letzteres, weil eine Unstetigkeit im Gradienten von  $S$  einen unendlichen Wärmestrom zur Folge hätte. Daraus folgt:

$$S_0 = \begin{cases} S_1 + (G_0/a) r_0^a \\ S_1 + G_0 \ln(r_0/r_1) \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{oder } r_0 = \begin{cases} [(S_0 - S_1)(a/G_0)]^{1/a} \\ r_1 \exp\{(S_0 - S_1)/G_0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -C_1 \sqrt{B E^2} J_1(\sqrt{B E^2} r_0) \\ & = \begin{cases} G_0 [(S_0 - S_1) a/G_0]^{(a-1)/a} \\ (G_0/r_1) \exp\{-(S_0 - S_1)/G_0\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Es ist  $J_1(\sqrt{B E^2} r_0) = J_1(2,405) = 0,52$ . Ersetzt man in (13)  $\sqrt{B E^2}$  gemäß (9) durch  $2,405/r_0$ , so folgt aus (12) und (13)

$$C_1 = \begin{cases} -0,8(S_0 - S_1) a & \text{für } a \neq 0, \\ -0,8(S_0 - S_1)/\ln(r_0/r_1) & \text{für } a = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Wir betrachten die radial einwärts gerichtete Strömung, also  $a < 0$ . Mit  $S_0 > S_1$  wird  $C_1 > 0$ . Setzt man  $C_1$  aus (14) in (8) ein, so erkennt man, daß der Wert von  $S$  in der Achse linear mit  $|a|$  ansteigt.

Aus (9) und (12) erhält man  $G_0$ :

$$G_0 = (S_0 - S_1) a r_0^{-a} = (S_0 - S_1) a (B E^2)^{a/2} / 2,405^a. \quad (15)$$

Es ist  $G_0 < 0$  für  $a < 0$ ,  $S_0 > S_1$ ;  $|G_0|$  ist um so größer, je kleiner  $B E^2$ . In diesem Falle muß eine hohe Temperatur die erforderliche elektrische Leitfähigkeit erzwingen.

Für die Stromstärke

$$I = 2 \pi \int_0^{r_0} \sigma E r dr \quad (16)$$

ergibt die Rechnung den Wert

$$I = 2 \pi (S_1 - S_0) a E^{-1}. \quad (17)$$

Man hat eine fallende Charakteristik. Bei gegebenem  $E$  wächst  $I$  mit  $|a|$ . Die JOULESche Wärme pro Längeneinheit des Bogens ist

$$IE = 2\pi(S_1 - S_0) a. \quad (18)$$

Der Leistungsumsatz ist der Anströmung proportional. Der Wärmestrom durch Wärmeleitung pro Längeneinheit beträgt beim Radius  $r = r_0$

$$-\alpha \frac{dT}{dr} \cdot 2\pi r_0 = -G(r_0) \cdot 2\pi r_0 \\ = -2\pi(S_1 - S_0) a. \quad (19)$$

Der Vergleich von (18) und (19) zeigt, daß in dem betrachteten Modell die gesamte JOULESche Wärme an der Stelle  $r_0$  durch Wärmeleitung abgeführt wird. Wird jedoch berücksichtigt, daß auch in der leitfähigen Zone noch eine radiale Strömung herrscht, so erhöht sich der Anteil des konvektiven Energie- transports.

### 3. Der Lichtbogen mit axialer Strömung

Es wird angenommen, daß der Geschwindigkeitsvektor überall achsenparallel ist. Die Vernachlässigung der radialen Strömung wird sich in Kathodennähe auswirken. In Zylinderkoordinaten ist  $v_r = v_\varphi = 0$ . Für  $v_z$  gilt die Kontinuitätsgleichung  $\varrho v_z = \text{const}$ , so daß wir wieder die Konstante  $a$  benutzen können. Gleichung (7) lautet in Zylinderkoordinaten:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial z^2} + a \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z} = B E^2 \tilde{S}. \quad (20)$$

In der stromlosen Zone ist  $B = 0$ . Der Ansatz  $\tilde{S} = S_1(r) \cdot S_2(z)$  liefert in diesem Falle sofort

$$S_1(r) = \alpha(\nu) J_0(\nu r) + \beta(\nu) N_0(\nu r), \quad (21)$$

$$S_2(z) = A(\nu) e^{\nu z} + B(\nu) e^{-\nu z}, \\ \gamma_{1,2} = \frac{1}{2} a (1 \pm \sqrt{1 + 4\nu^2/a^2}). \quad (22)$$

$N_0$  ist die NEUMANNsche Funktion nullter Ordnung,  $\nu > 0$  ist eine beliebige Konstante. Schließt man exponentiell ansteigende Lösungen aus [ $A(\nu) = 0$ ] und nimmt eine starke Anströmung an ( $4\nu^2/a^2 \ll 1$ ), so wird

$$S_2(z) = B(\nu) \cdot e^{-\nu^2 z/a}. \quad (23)$$

Dasselbe erhält man, wenn in Gl. (18)  $\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$  gegen  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S}{\partial r} \right)$ , d. h. die axiale gegen die radiale Wärmeleitung, vernachlässigt wird. Da (20) linear

ist, ist das Superpositionsprinzip anwendbar. Multipliziert man (21) mit (23) und integriert über  $\nu$ , so erhält man die allgemeine Lösung für die stromlose Zone:

$$S(r, z) = \int_0^\infty [\alpha(\nu) J_0(\nu r) + \beta(\nu) N_0(\nu r)] e^{-\nu^2 z/a} d\nu. \quad (24)$$

Die Funktionen  $\alpha(\nu)$  und  $\beta(\nu)$  können den Randbedingungen angepaßt werden.

Für den leitfähigen Kern folgen wir zunächst STINE und WATSON<sup>5</sup>.  $\partial^2 \tilde{S} / \partial z^2$  sowie die Radialkomponenten der Feldstärke und des elektrischen Stromes werden vernachlässigt. Betrachtet man  $\sigma = j/E$  ( $j$  = elektrische Stromdichte) und bildet das Integral

$$\int_0^{r_0} 2\pi r \sigma dr = \frac{1}{E(z)} \int_0^{r_0} 2\pi r j dr = I/E, \quad (25)$$

so findet man

$$E = I / \int_0^{r_0} 2\pi r \sigma dr. \quad (26)$$

$r_0$  ist wieder die Grenze der leitfähigen Zone. Wir setzen in (20) wieder  $\tilde{S} = S_1(r) S_2(z)$  und erhalten

$$\sigma E^2 = \frac{I^2 \sigma}{\left[ \int_0^{r_0} 2\pi r \sigma dr \right]^2} = \frac{I^2 S_1(r) S_2(z)}{B S_2(z)^2 \left[ \int_0^{r_0} 2\pi r S_1(r) dr \right]^2}. \quad (27)$$

Aus (20) entstehen die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dS_1}{dr} \right) + \lambda^2 S_1 = 0, \quad (28)$$

$$-a \frac{dS_2}{dz} - \lambda^2 S_2 + \frac{1}{S_2} \frac{I^2}{B \left[ \int_0^{r_0} 2\pi r S_1(r) dr \right]^2} = 0; \quad (29)$$

$\lambda > 0$  ist eine beliebige Konstante.

Die Lösung von (28) muß für  $r = 0$  regulär sein und lautet daher

$$S_1(r) = J_0(\lambda r). \quad (30)$$

Ist  $r_0$  wieder die Grenze der leitfähigen Zone, so ist  $\sigma(r_0) = B \tilde{S}(r_0) = 0$  und daher

$$\lambda = 2,405/r_0 = \lambda_0. \quad (31)$$

Im Hinblick auf die spätere Reihenentwicklung wird die so bestimmte Größe  $\lambda$  sogleich  $\lambda_0$  genannt. Das Integral im Nenner von (29) ist

$$\int_0^{2,405/\lambda_0} 2\pi r J_0(\lambda_0 r) dr = 2\pi \cdot \frac{0,52}{2,405} r_0^2. \quad (32)$$

(2) hat nach der Integration von (29) die Lösung

$$\tilde{S} = \frac{I \lambda_0}{2 \pi \cdot 0,52 \cdot 2,405 \cdot B^{1/2}} \cdot J_0(\lambda_0 r) (1 - e^{-2\lambda_0^2 z/a})^{1/2}, \quad (33)$$

und für  $E$  erhält man

$$E = \lambda_0 / [B^{1/2} (1 - e^{-2\lambda_0^2 z/a})^{1/2}]. \quad (34)$$

(33) und (34) wurden von STINE und WATSON abgeleitet. (33) stimmt in zweierlei Hinsicht nicht mit dem Experiment überein:

1. In der Bogenachse  $r=0$  steigt  $\tilde{S}$  nach (33) mit wachsendem  $z$  monoton, während es im Experiment abnimmt.
2. Die Grenze  $r_0$  der leitfähigen Zone ist nach (31) unabhängig von  $z$ , während sie im Experiment für kleine  $z$  abnimmt.

Die Schwierigkeit besteht darin, daß (29) nicht linear ist und daher das Superpositionsprinzip nicht anwendbar ist.  $\lambda_0$  nimmt den festen Wert (31) an und eine allgemeine Lösung, die sich speziellen Bedingungen anpassen läßt, läßt sich nicht gewinnen.

Um diese Nachteile zu beheben, ersetzen wir in (27) im Nenner  $S_1(r) S_2(z)$  durch eine Näherungslösung  $S_1^{(0)}(r) S_2^{(0)}(z)$  und wählen als eine solche die Lösung (33) von STINE und WATSON. An Stelle von (20) erhalten wir nunmehr

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} \right) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \zeta} - [\lambda_0^2 / (1 - e^{-2\lambda_0^2 \zeta})] \tilde{S} = 0, \quad (35)$$

wobei noch  $z = a \zeta$  gesetzt wurde. Der Separationsansatz  $\tilde{S} = S_1(r) S_2(\zeta)$  liefert

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dS_1}{dr} \right) + \lambda^2 S_1 = 0, \quad (36)$$

$$\frac{dS_2}{d\zeta} + [\lambda^2 - \lambda_0^2 / (1 - e^{-2\lambda_0^2 \zeta})] S_2 = 0 \quad (37)$$

mit den Lösungen

$$S_1(r) = J_0(\lambda r), \quad (38)$$

$$S_2(\zeta) = C \cdot e^{(\lambda_0^2 - \lambda^2) \zeta} \cdot (1 - e^{-2\lambda_0^2 \zeta})^{1/2}. \quad (39)$$

Für  $\lambda = \lambda_0$  geht (39) in die Lösung von STINE und WATSON über, die somit als Spezialfall in (39) enthalten ist. Da (35) linear ist, ist das Superpositionsprinzip anwendbar und wir erhalten als allgemeine Lösung:

$$\tilde{S} = (1 - e^{-2\lambda_0^2 \zeta})^{1/2} \cdot \int_{\lambda_0}^{\lambda_{\max}} C(\lambda) e^{(\lambda_0^2 - \lambda^2) \zeta} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (40)$$

oder in Summenform:

$$\tilde{S} = (1 - e^{-2\lambda_0^2 \zeta})^{1/2} \sum_{i=0}^n C_i e^{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2) \zeta} J_0(\lambda_i r). \quad (41)$$

Für  $n=0$  ist das die Lösung von STINE und WATSON. Um exponentiell ansteigende Lösungen auszuschließen, die für  $\zeta \rightarrow \infty$  den Wert  $S_2 = \infty$  ergeben würden, ist in (40)  $\lambda^2_{\max} > \lambda_0^2$  und in (41)  $\lambda_i^2 > \lambda_0^2$  zu wählen. Wir arbeiten im folgenden mit der Sumendarstellung (41). Diese geht für  $\zeta \rightarrow \infty$  in den zylindrischen Lichtbogen über:

$$\tilde{S} = C_0 J_0(\lambda_0 r). \quad (42)$$

Aus

$$I = \int_0^{r_0} 2 \pi j r dr = \int_0^{r_0} 2 \pi \sigma E r dr \quad (43)$$

erhält man

$$C_0 = \frac{I \lambda_0}{2 \pi \cdot 2,405 \cdot 0,52 B^{1/2}}. \quad (44)$$

Um auch die Konstanten  $C_1$  bis  $C_n$  zu berechnen, werde an  $n$  Stellen  $\zeta = \zeta_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , der Strom  $I$  berechnet, der unabhängig von  $\zeta$  sein muß:

$$\begin{aligned} I &= 2 \pi B E(\zeta_j) \int_0^{r_j} r \tilde{S} dr \\ &= 2 \pi B^{1/2} \lambda_0 \sum_{i=0}^n C_i e^{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2) \zeta_j} (r_j / \lambda_j) J_1(\lambda_i r_j). \end{aligned} \quad (45)$$

$r_j$  ist die Grenze des leitfähigen Kerns bei  $\zeta = \zeta_j$  und kann gut durch

$$r_j = r_0 (1 - e^{-2\lambda_0^2 \zeta_j})^{1/2} \quad (46)$$

angenähert werden. Entsprechend  $\lambda_j$  durch

$$\lambda_j = \lambda_0 / (1 - e^{-2\lambda_0^2 \zeta_j})^{1/2}. \quad (47)$$

(45) ist nunmehr ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der  $C_i$ . Die Lösung für den leitfähigen Kern ist damit eindeutig bestimmt.

Mit Hilfe der Transformationen

$$S - S_0 = \tilde{S} = (I \lambda_0 / (2 \pi B^{1/2})) s, \quad (48)$$

$$z = a \zeta = (\varrho c_p v r_0^2 / (\pi \cdot 2,405^2)) \xi, \quad (49)$$

$$r = (r_0 / 2,405) \varrho, \quad (50)$$

$$D_i = (2 \pi B^{1/2} / (I \lambda_0)) C_i, \quad (51)$$

$$\mu_i = (1 - e^{-2\lambda_0^2 \zeta_i})^{-1/2}, \quad i = 1, \dots, n; \quad \mu_0 = 1; \quad (52)$$

$$\varrho_j = 2,405 \mu_j^{-1} \quad (53)$$

erhalten wir (41) und (45) in der dimensionslosen Form

$$s = (1 - e^{-2\lambda_0^2 \zeta})^{1/2} \sum_{i=0}^n D_i e^{(1 - \mu_i^2) \xi} J_0(\mu_i \varrho), \quad (54)$$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^n D_i e^{(1 - \mu_i^2) \xi} J_1(\mu_i \varrho_j) \cdot (\varrho_j / \mu_i), \\ j &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (55)$$

Diese Darstellung enthält die Materialkonstanten  $B$  und  $S_0$ , die Strömungskonstante  $a = \varrho c_p v/\kappa$  und den asymptotischen Bogenradius  $r_0$  nicht mehr. Sie ist daher für Lichtbögen verschiedenen Materials, verschiedener Anströmung, verschiedener Stromstärke und mit verschiedenem Bogenradius gültig.

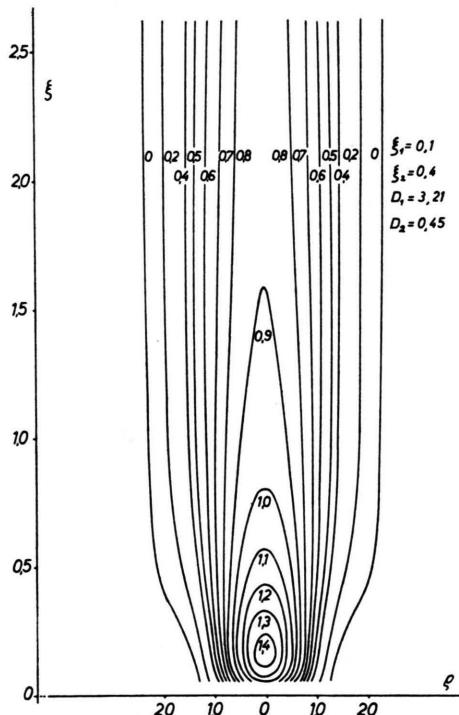


Abb. 1. Linienkonstanten  $s$  (= Isothermen) des axial beströmten Lichtbogens.

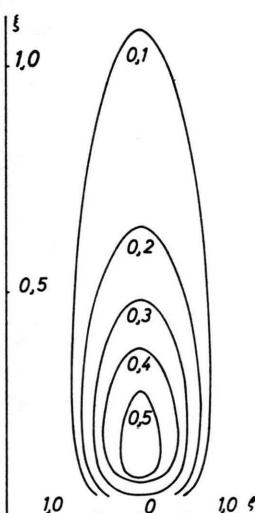


Abb. 2. Isothermen in einer flammenähnlichen Struktur bei Vernachlässigung des asymptotischen Teils.

Die  $\xi_j$  sind frei wählbar, wobei sich allerdings nicht jede beliebige Wahl als zweckmäßig erweist.

In Abb. 1 ist  $\xi_1 = 0,1$ ,  $\xi_2 = 0,4$  gewählt. Es zeigt sich, daß schon bei  $n = 2$  die Isothermen des Lichtbogens gut wiedergegeben werden. Die  $\xi$ -Achse ist gegenüber der  $\varrho$ -Achse um das Fünffache gedehnt. Ohne das Glied mit  $i = 0$  in (54), das den asymptotischen Teil der Lichtbogensäule mit reiner Zylindersymmetrie darstellt, ergibt sich eine flammenähnliche Struktur (Abb. 2). In der Tat wirken sowohl beim Lichtbogen als auch bei der Flamme die drei Prozesse: Aufheizung, Wärmeleitung und Strömung zusammen.

Für die stromlose Zone erhält man aus (21) und (23) mit Anwendung des Superpositionsprinzips:

$$S(r, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} [A_i J_0(\nu_i r) + B_i N_0(\nu_i r)] e^{-\nu_i^2 \zeta}. \quad (56)$$

$$\text{Mit } \nu_1 = 2,405/r, \quad z = a/\nu_1^2, \quad \nu_i^2/\nu_1^2 = \tau_i^2, \quad r = r_0 \varrho/2,405 \quad (57)$$

erhält man die normierte Darstellung:

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} [A_i J_0(\tau_i \varrho) + B_i N_0(\tau_i \varrho)] \cdot e^{-\tau_i^2 \xi}. \quad (58)$$

Dabei ist  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_1 = 1$ ,  $B_0 = 0$ .

Bezeichnet man (54) mit  $s_i$ , (58) mit  $s_a$ , wobei die Indizes  $i$  und  $a$  auf innen bzw. außen hinweisen, so müssen längs einer Kurve  $\xi(\varrho)$ , die z. B. die Kurve (53) sein kann, die annähernd gleich der Isotherme  $\tilde{S} = 0$  ist, die Anschlußbedingungen

$$s_i(\varrho, \xi) = s_a(\varrho, \xi) \quad \text{und} \quad \frac{\partial s_i}{\partial \varrho} = \frac{\partial s_a}{\partial \varrho} \quad (59)$$

erfüllt sein, die besagen, daß an der Nahtstelle der leitfähigen und der stromlosen Zone die Temperaturen und Temperaturgradienten übereinstimmen müssen.

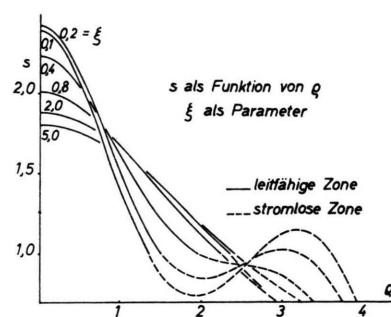


Abb. 3. Anschluß der stromlosen an die leitfähige Zone im axial beblasenen Bogen.

Abb. 3 zeigt das Ergebnis einer Rechnung. Der Anschluß der beiden Zonen ist überall gut. Für  $\xi > 0,5$  ist auch die Darstellung der stromlosen Zone brauchbar. In Kathodennähe treten jedoch in der stromlosen Zone radiale Oszillationen der Temperatur auf, die sicher unrealistisch sind. Jedoch sind in Kathodennähe auch die der Rechnung zugrunde liegenden Annahmen nicht mehr zutreffend, da dort die Radialkomponenten von Geschwindigkeit und Feldstärke nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

Den Spannungsabfall längs des Bogens berechnet man mit Hilfe von (34) zu

$$U = \int_0^Z E \, dz = \frac{2 \lambda_0 B^{1/2}}{a} \ln \left\{ \frac{1 + (1 - e^{-2\lambda_0^2 Z/a})^{1/2}}{1 - (1 - e^{-2\lambda_0^2 Z/a})^{1/2}} \right\}, \quad (60)$$

Diese Beziehung wurde schon in <sup>5</sup> abgeleitet. Sie läßt sich für große Bogenlängen  $Z$  vereinfachen. Für

$Z = \infty$  wird  $U = \infty$ . Ist  $Z$  endlich, aber so groß, daß

$$e^{-2\lambda_0^2 Z/a} = \varepsilon \ll 1 \quad (61)$$

ist, dann wird

$$U = (\lambda_0 / B^{1/2}) Z + (a / (B^{1/2} \lambda_0)) \ln 2. \quad (62)$$

Aus (62) kann die Abhängigkeit der Bogenspannung von der Bogenlänge  $Z$ , dem Bogenradius  $r_0 = 2,405 / \lambda_0$ , der Materialkonstanten  $B$  und der Anströmungskonstanten  $a$  abgelesen werden. Eliminiert man  $\lambda_0$  mittels (48), so erhält man

$$U = \frac{2\pi}{I} \frac{\tilde{S}}{s} Z + \frac{\ln 2}{2\pi} \frac{a}{B} \frac{s}{\tilde{S}} I. \quad (63)$$

Die Spannung setzt sich aus einem Glied fallender ( $\sim 1/I$ ) und einem Glied steigender Charakteristik zusammen. Multipliziert man (62) mit  $I$ , so erhält man die Bogenleistung:

$$U I = \frac{I}{B^{1/2}} \left( \frac{2,405}{r_0} Z + \frac{a r_0}{2,405} \ln 2 \right). \quad (64)$$

## Eine Untersuchung der Vorgänge in supraleitenden Flußpumpen

HANS VOIGT

Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen

(Z. Naturforsch. **21 a**, 510—514 [1966]; eingegangen am 3. März 1966)

*Herrn Prof. Dr. TREDELENBURG zum 70. Geburtstag gewidmet*

Ein wesentlicher Vorgang beim Betrieb einer supraleitenden Flußpumpe ist das Wandern eines normalleitenden Bereiches mit einem magnetischen Fluß über eine stromdurchflossene supraleitende Platte. Die hiermit verknüpften Erscheinungen, insbesondere Spannungen und Stromänderungen, werden analysiert und führen u. a. auf einen Sättigungsstrom sowie einen bisher unbekannten Beitrag zu den Verlusten einer Flußpumpe. Die Ergebnisse werden mit dem Experiment verglichen.

Unter der Bezeichnung „Flußpumpen“ (aus dem Englischen „flux pump“) sind in letzter Zeit Anordnungen bekannt geworden, welche hauptsächlich dazu dienen, in supraleitenden Magnetspulen hohe Ströme zu erzeugen. Die Zufuhr hoher Ströme ( $> 1000$  Amp.) zu Objekten, die sich auf der Temperatur des flüssigen Heliums ( $4,2^{\circ}\text{K}$ ) befinden, bereitet wegen der Wärmeleitung und des elektrischen Widerstands der Zuleitungen große Verluste von flüssigem Helium, dessen Verdampfungswärme sehr gering ist. Es ist daher vielfältig versucht worden, mit Hilfe von supraleitenden Umformern oder Generatoren hohe Stromstärken im Heliumbad selbst zu erzeugen.

MENDELSSOHN <sup>1</sup> hat dies 1933 mit seinem „Gleichstromtransformator“ wohl zuerst erfolgreich getan. Hiermit können leicht sehr hohe Ströme erzeugt werden, da der Vorgang nur einmal ausführbar ist, jedoch nur in Kreisen sehr kleiner Selbstinduktivität. Hohe Magnetfelder können deshalb mit dieser Methode nur in sehr kleinen Volumina (verglichen mit der Größe des Umformers) erzeugt werden. Dies trifft auch für die ähnlichen „Flußkompressoren“ <sup>2</sup> und „Flußkonzentratoren“ <sup>3</sup> zu, welche ebenfalls nur einen einmaligen Vorgang zulassen.

OLSEN <sup>4</sup> dagegen hat eine periodisch arbeitende Anordnung angegeben, welche im wesentlichen aus einem Transformator mit supraleitenden Wicklungen

<sup>1</sup> K. MENDELSSOHN, Nature (Lond.) **132**, 602 [1933].

<sup>2</sup> P. S. SWARTZ u. C. H. ROSNER, J. Appl. Phys. **33**, 2292 [1962].

<sup>3</sup> C. F. HEMPESTAD, Y. B. KIM u. A. R. STRNAD, J. Appl. Phys. **34**, 3326 [1963].

<sup>4</sup> J. L. OLSEN, Rev. Sci. Instr. **29**, 537 [1958].